

УДК 517.938, 534.23

А.Ю. Швец, В.А. Печерный

*Национальный технический университет Украины "КПИ", Киев
e-mail: alex.shvets@bigmir.net*

Разнообразие хаотической динамики одной неидеальной электроупругой системы

Досліджується неідеальна динамічна система "генератор-п'єзокерамічний випромінювач". Показано, що в даній системі реалізуються всі основні сценарії переходу до детермінованого хаосу. Побудовані та детально вивчені основні типи регулярних, хаотичних і гіперхаотичних атракторів системи.

The nonideal dynamical system "generator – piezoceramic transducer" is considered. It is shown, that in the given system all basic scenarios of transition to deterministic chaos are implemented. The basic types of the regular, chaotic and hyperchaotic attractors of a system are constructed and in details investigated.

Введение. Любая колебательная динамическая система, несмотря на огромное разнообразие таких систем, фактически состоит из двух основных элементов. А именно, собственно колебательной системы, которую мы будем называть колебательной нагрузкой, и какого-либо энергетического источника возбуждения колебаний. Все многообразие существующих колебательных динамических систем можно разделить на два класса. Под неидеальными колебательными динамическими системами понимаются такие системы, у которых источник возбуждения колебаний имеет мощность значительно превышающую мощность, потребляемую колебательной нагрузкой. В свою очередь

системы, у которых мощность, потребляемая колебательной нагрузкой, сравнима по величине с мощностью источника возбуждения колебаний, называются неидеальными [1, 2]. При математическом моделировании неидеальных систем обязательным является учет взаимодействия между колебательной нагрузкой и источником возбуждения колебаний.

Проблемы глобального энергосбережения заставляют максимально минимизировать мощность тех или иных источников возбуждения колебательных систем. Поэтому в настоящее время большинство реальных колебательных систем принципиально должны трактоваться как неидеальные.

Математическая модель системы. В работах [2] – [4] исследовались установившиеся режимы колебаний одной электроупругой динамической системы, состоящей из пьезокерамического излучателя, колебания которого возбуждаются электроламповым LC-генератором ограниченной мощности. Такого рода системы находят широкое применение в современных навигационных устройствах [2]. Рассмотренная в [2] – [4] динамическая система является неидеальной детерминированной динамической системой. Было установлено, что такая система обладает большим разнообразием установившихся динамических режимов, как регулярных, так и хаотических. Целью настоящей работы является продолжение и углубление исследований, начатых в [2] – [4].

Следуя работам [2] – [4], рассмотрим цилиндрический стержневой пьезокерамический излучатель, к электродам которого прикладывается электрическое напряжение, возбуждаемое электроламповым LC-генератором (рис. 13).

Обозначим через $\phi(t)$ величину пропорциональную электрическому напряжению на сетке лампы генератора:

$$\phi(t) = \int_0^t (e_g - E_g) dt, \quad (1)$$

а через $2V(t)$ — электрическую разность потенциалов на электродах излучателя. Как показано в работах [2] – [4], математическая модель, описывающая динамику системы "пьезокерамический излучатель-генератор" может быть записана при помощи следующей нелинейной системы дифференциальных уравнений:

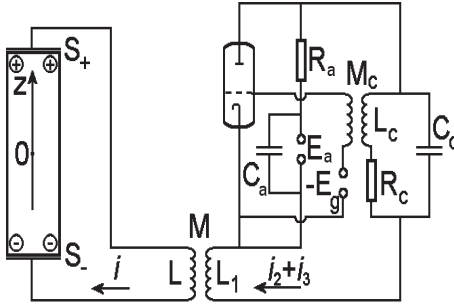


Рис. 13: Схема рассматриваемой системы.

$$\begin{aligned} \ddot{\phi} + \omega_0^2 \phi &= a_0 \dot{\phi} + a_2 \dot{\phi}^2 - a_3 \dot{\phi}^3 - a_4 V(t), \\ \ddot{V}(t) + \omega_1^2 V(t) &= a_5 \phi + a_6 \dot{\phi} - a_7 \dot{V}(t). \end{aligned} \quad (2)$$

Параметры системы (2) определяются через электромагнитные, геометрические и деформационные параметры генератора и излучателя по следующим формулам [2]:

$$\begin{aligned} \omega_0^2 &= \frac{R_a + R_k}{R_a L_k C_k}, \quad \omega_1^2 = \frac{2h}{LS\epsilon_{33}(1 - k^2)}, \quad a_0 = a_1 - \frac{M^2 R_c}{L_c C_c L R_a^2}, \\ a_1 &= \frac{M_c}{L_c C_c} \left[I_1 - \frac{R_c R_a C_c - L_c}{R_a (M_c - D L_c)} + \frac{R_c L_1}{R_a^2 M_c} - 3I_3 (E_g)^2 \right], \\ a_2 &= 3 \frac{M_c I_3 E_g}{L_c C_c}, \quad a_3 = \frac{M_c I_3}{L_c C_c}, \quad a_4 = \frac{2 M M_c}{L R_a L_c C_c}, \\ a_5 &= -\frac{M \omega_1^2 R_c (R_a + R_c)}{2 M_c R_a L_c}, \quad a_6 = -\frac{M \omega_1^2 R_c}{2 M_c R_a}, \quad a_7 = \frac{k^2}{\eta_0 h S (1 - k^2)}. \end{aligned} \quad (3)$$

Детальное объяснение физического смысла параметров, входящих в формулы (3), приведено в [2] – [4].

Для определения возможных установившихся динамических режимов взаимодействия в системе (2) введем безразмерные переменные

$$\xi = \frac{\phi \omega_0}{E_g}; \quad \frac{d\xi}{d\tau} = \zeta; \quad \beta = \frac{V}{E_g}; \quad \frac{d\beta}{d\tau} = \gamma; \quad \tau = \omega_0 t.$$

Тогда система уравнений (2) запишется в виде:

$$\begin{aligned}
 \frac{d\xi}{d\tau} &= \zeta, \\
 \frac{d\zeta}{d\tau} &= -\xi + \alpha_1\zeta + \alpha_2\zeta^2 - \alpha_3\zeta^3 - \alpha_4\beta, \\
 \frac{d\beta}{d\tau} &= \gamma, \\
 \frac{d\gamma}{d\tau} &= -\alpha_0\beta + \alpha_5\xi + \alpha_6\zeta - \alpha_7\gamma,
 \end{aligned}
 \tag{4}$$

где коэффициенты $\alpha_0, \dots, \alpha_7$ соответственно равны:

$$\begin{aligned}
 \alpha_0 &= \frac{\omega_1^2}{\omega_0^2}; & \alpha_1 &= \frac{a_0}{\omega_0}; & \alpha_2 &= \frac{a_2 E_g}{\omega_0}; & \alpha_3 &= \frac{a_3 E_g^2}{\omega_0}; \\
 \alpha_4 &= \frac{a_4}{\omega_0}; & \alpha_5 &= \frac{a_5}{\omega_0^2}; & \alpha_6 &= \frac{a_6}{\omega_0^2}; & \alpha_7 &= \frac{a_7}{\omega_0}.
 \end{aligned}$$

Как установлено в [2, 4], при $\alpha_0 \neq -\alpha_4\alpha_5$ единственным положением равновесия системы (4) будет начало координат фазового пространства. При определенных соотношениях между параметрами системы такое положение равновесия становится неустойчивым. В этом случае все траектории системы, стартующие из окрестности начала координат фазового пространства, с течением времени покинут эту окрестность и, в силу диссипативности системы, будут стремиться к некоторым предельным множествам — аттракторам, которые могут быть как регулярными, так и хаотическими [2, 4]. В упомянутых выше работах установлено существование нескольких типов хаотических аттракторов системы (4) и описан ряд сценариев перехода от регулярных колебаний к хаотическим.

Построение карты динамических режимов. Система уравнений (4) является нелинейной, и следовательно, нахождение ее точных решений в виде аналитических формул в общем случае невозможно. Поэтому для построения решений системы (4) использовались численные методы и алгоритмы. Методика проведения численных расчетов детально описана в [2]. Вкратце поясним суть этой методики. Основным расчетным методом нахождения решений системы (4) являлся метод Рунге–Кутты четвертого или пятого порядка с применением корректирующей процедуры Дормана–Принса [5], обеспечивающей очень высокую локальную точность проводимых вычислений (порядка $O(10^{-8})$ – $O(10^{-12})$). При построении фазовых портретов

установившихся режимов особое внимание уделялось на недопущение их искажения траекториями переходных процессов. Для построения спектра ляпуновских характеристических показателей (ЛХП) аттракторов применялся обобщенный алгоритм Бенеттина и др. [6] – [9]. Для построения сечений и отображений Пуанкаре аттракторов системы применялся метод Ено [9, 10]. Наконец, для получения распределений спектральных плотностей применялся метод Файлона [11].

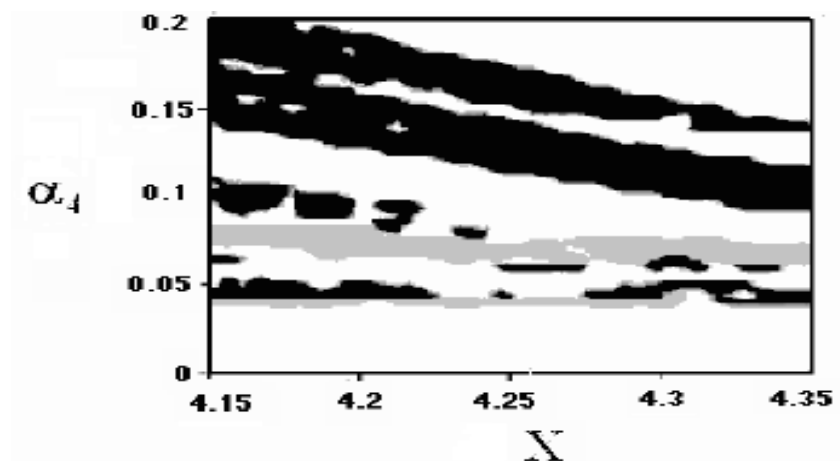
При исследовании динамических режимов полагалось, что параметры системы принимают значения $\alpha_0 = 0.995$, $\alpha_1 = 0.04$, $\alpha_2 = 0.63 \cdot X$, $\alpha_3 = 0.18 \cdot X$, $0 \leq \alpha_4 \leq 0.4$, $\alpha_5 = -0.0604$, $\alpha_6 = -0.12$, $\alpha_7 = 0.01$. Отметим, что такие значения коэффициентов соответствуют реальным характеристикам LC-генераторов и пьезокерамических излучателей [2]. Здесь X является безразмерным переменным множителем, изменение которого меняет характеристики работы лампы генератора. В качестве бифуркационных выбирались параметры X и α_4 , характеризующий взаимосвязь между излучателем и генератором. Заметим, что параметры X и α_4 являются мультипараметрами, в силу того что их изменение может быть эквивалентным изменению нескольких параметров системы "пьезокерамический излучатель–генератор". При так выбранных параметрах системы (4) начало координат фазового пространства является единственным положением равновесия, которое будет неустойчивым по Ляпунову [2].

Исследование системы (4) начнем с построения карты динамических режимов. Такая карта представляет собой диаграмму на плоскости, где по осям координат отложены какие-либо два из параметров системы и показаны области установившихся динамических режимов различных типов. Карты динамических режимов дают достаточно полное представление о расположении установившихся режимов разных типов в пространстве параметров исследуемой системы. Они имеют очень важное значение при проведении различного рода натурных и лабораторных экспериментальных исследований системы. Основой для построения областей установившихся режимов разных типов является определение сигнатуры спектра ЛХП в точках карты. Далее используются критерии диагностики типа режима [9]. В ряде случаев для уточнения типа режима проводится детальное исследование его основных характеристик (фазовый портрет, сечение Пуанкаре и т.п.). В настоящей работе построена карта относительно-

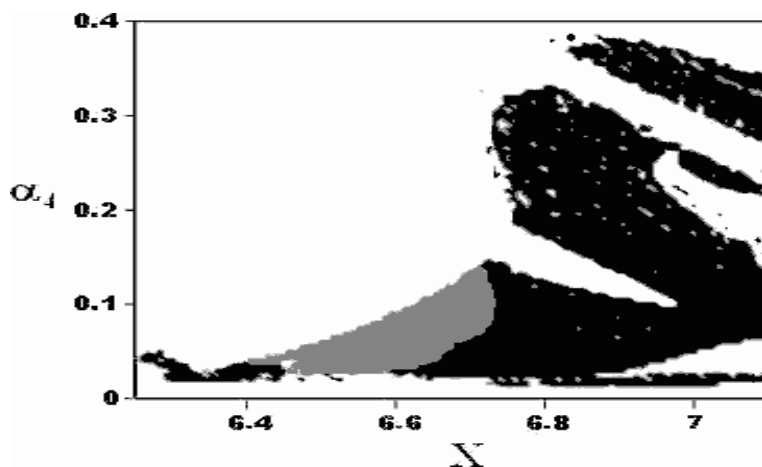
но параметров α_4 и X . Это позволило выявить некоторые новые по сравнению с работами [2],[4] типы регулярных и хаотических аттракторов системы (4), а также установить новые, для данной системы, сценарии перехода к хаосу.

На рис. 14 приведены, полученные в результате анализа и обработки данных компьютерных экспериментов, некоторые из листов карты динамических режимов системы "пьезокерамический преобразователь-генератор". На рис. 14а белые области карты соответствуют тем значениям α_4 и X , при которых аттракторами системы (4) будут предельные циклы с сигнатурой спектра ЛХП вида $\langle 0, -, -, - \rangle$. Серые области карты соответствуют квазипериодическим аттракторам с сигнатурой спектра ЛХП вида $\langle 0, 0, -, - \rangle$. И, наконец, черные области — хаотическим аттракторам с сигнатурой спектра ЛХП вида $\langle +, 0, -, - \rangle$. На рис. 14б белым и черным цветами нанесены области таких же, как и на первом листе карты, динамических режимов. Но на втором листе карты серые области соответствуют гиперхаотическим аттракторам с сигнатурой спектра ЛХП вида $\langle +, +, 0, - \rangle$. Как видно из рисунка, в области существования хаотических аттракторов вклиниваются небольшие по площади области существования предельных циклов. Это так называемые "окна периодичности".

Исследование установившихся режимов. Проведем разрез карты (рис. 14а) по вертикальной оси $X = 4.30$ и изучим смену типов установившихся в системе динамических режимов, которые происходят в системе при изменении параметра α_4 . Особое внимание уделим возникновению хаотических режимов и установлению сценариев перехода к хаосу. Как известно, основным практическим критерием возникновения детерминированного хаоса является наличие в спектре ЛХП хотя бы одного положительного показателя [9, 12]. На рис. 15а построен график зависимости старшего, отличного от нуля, ляпуновского характеристического показателя системы от значений параметра α_4 . График построен следующим образом. На координатную плоскость наносится значение старшего показателя, если оно не равно нулю при соответствующем значении α_4 . Если же старший показатель равен нулю, то при соответствующем значении α_4 на координатную плоскость наносится значение второго ляпуновского показателя. Если же старший и второй показатели равны нулю, то на координатную плоскость наносится точка с нулевой ординатой. Как видно из рисунка, существует ряд интервалов значений параметра α_4 , при ко-



а



б

Рис. 14: Карта динамических режимов

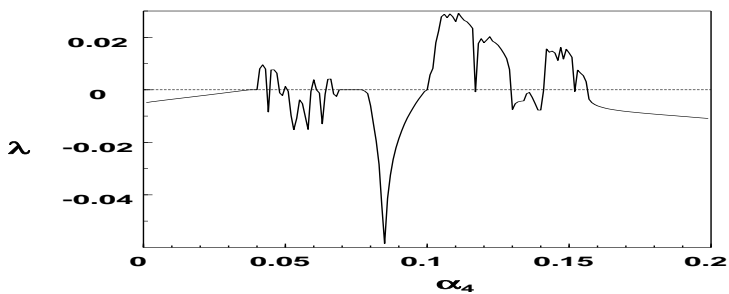
торых старший характеристический показатель положительный. Эти интервалы соответствуют черным областям карты динамических режимов (рис. 14а), в которых в системе существуют хаотические аттракторы.

На рис. 15б приведена фазопараметрическая характеристика системы — так называемое бифуркационное дерево. В данном случае эта характеристика построена относительно фазовой переменной ξ . Однако бифуркационные деревья, построенные относительно других координат системы, качественно будут подобны приведенному на рис. 3б. Внимательное изучение рис. 15б позволяет определить области существования регулярных и хаотических режимов. Так, светлым участкам "кроны" этого дерева соответствуют периодические режимы установившихся колебаний системы (4), а густо затемненным — хаотические. По бифуркационному дереву можно определить точки бифуркаций регулярных режимов и пороговые точки перехода к хаосу.

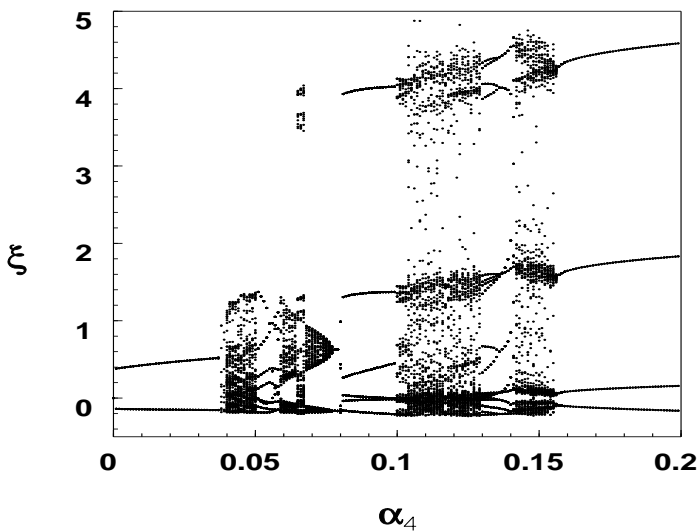
Рассмотрим такие смены режимов более детально. На сегменте $[0.2, 0.157]$ в системе существует устойчивый предельный цикл относительно простой структуры с сигнатурой спектра ЛХП вида $\langle 0, -, -, - \rangle$. Проекция фазового портрета цикла такого типа, построенная при $\alpha_4 = 0.158$, приведена на рис. 16а. Качественно подобные фазовые портреты будут иметь предельные циклы, построенные при других значениях α_4 из указанного сегмента. Сигнал, посылаемый излучателем во внешнюю среду, в этом случае будет периодическим.

При $\alpha_4 = 0.15655$, в результате седло-узловой бифуркации, предельный цикл исчезает и в системе возникает хаотический аттрактор. В сигнатуре спектра ЛХП такого аттрактора появляется старший положительный ляпуновский показатель $\langle +, 0, -, - \rangle$. На рис. 16а приведена проекция фазового портрета хаотического аттрактора системы при $\alpha_4 = 0.15655$. Переход к хаосу осуществляется через перемежаемость первого типа по Помо–Манневиллю [2, 9]. Ламинарной фазе этой перемежаемости соответствует близкое к периодическому движение в достаточно малой окрестности исчезнувшего предельного цикла, а турбулентной — непредсказуемые заранее раскрутки вокруг спиралей хаотического аттрактора.

На рис. 16в–г приведены сечение Пуанкаре плоскостью $\beta = 0$ хаотического аттрактора и его отображение Пуанкаре, построенные при $\alpha_4 = 0.15655$. Сечение и отображения Пуанкаре в таком случае пред-

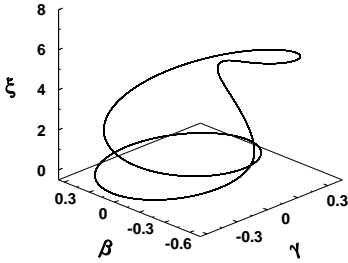


а

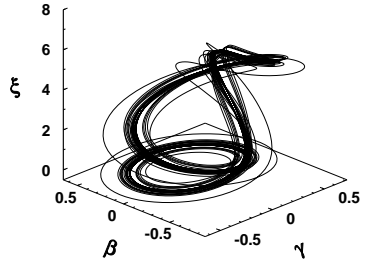


б

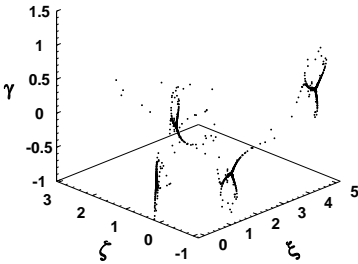
Рис. 15: График зависимости ляпуновского характеристического показателя от параметра α_4 (а); фазопараметрическая характеристика системы по координате ξ (б).



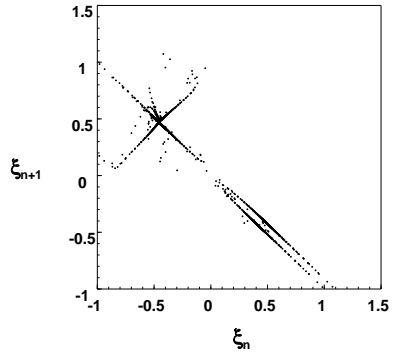
а



б



в



г

Рис. 16: Проекция фазового портрета предельного цикла при $\alpha_4 = 0.158$ (а) и хаотического аттрактора при $\alpha_4 = 0.15655$ (б); сечение (в) и отображение Пуанкаре (г) при $\alpha_4 = 0.15655$.

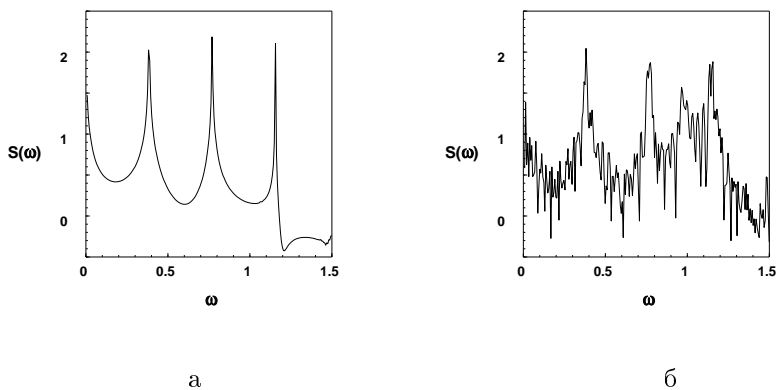


Рис. 17: Распределение спектральной плотности предельного цикла при $\alpha_4 = 0.158$ (а) и хаотического аттрактора при $\alpha_4 = 0.15655$ (б).

ставляют собой некоторые хаотические множества. Структура этих множеств очень отдаленно напоминает квазилиенточную [12]. Точки сечения Пуанкаре (рис. 16в) более плотно группируются в тех областях, которые соответствуют ламинарным фазам перемежаемости. В этих точках фазовая траектория системы пересекается с секущей плоскостью при прохождении в достаточно малой окрестности исчезнувшего предельного цикла, т.е. в почти периодическом режиме. Более разреженно нанесены точки, в которых траектория пересекается с секущей в турбулентной фазе. В динамике отображения Пуанкаре, построенного при $\alpha_4 = 0.15655$ (рис. 16г), также наблюдаются ламинарные и турбулентные фазы. После достаточно большого количества итерационных шагов отображения траектория проходит ламинарную фазу и стремится в отдаленные, от отображения исчезнувшего предельного цикла, области фазового пространства. В этих областях отображение характеризуется неустойчивостью относительно возмущения начальных условий. Вследствие реинжекции через некоторое время траектория снова появляется в области исчезнувшего предельного цикла.

На рис. 17 приведены построенные в логарифмической шкале распределения спектральной плотности (Фурье-спектр) предельного цикла при $\alpha_4 = 0.158$ (а) и хаотического аттрактора при $\alpha_4 = 0.15655$

(б). Как видно из рисунка, Фурье-спектр предельного цикла имеет типичную для предельных циклов дискретную и гармоническую структуру. Фурье-спектр хаотического аттрактора сплошной, что является дополнительным подтверждением его хаотичности. Тем не менее, в сплошном спектре хаотического аттрактора достаточно четко просматриваются отдельные пики, "воспоминания" об исчезнувшем предельном цикле. Сигнал, посылаемый излучателем во внешнюю среду, в этом случае будет хаотическим.

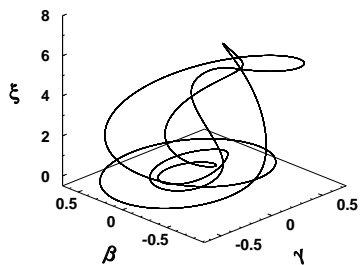
Хаотический аттрактор типа приведенного на рис. 16б существует в системе при изменении α_4 в пределах $[0.15655, 0.142]$. Как видно из рис. 15а–б, при дальнейшем уменьшении значения α_4 область существования хаоса сменяется областью существования в системе (4) предельных циклов. Это окно периодичности, которое разрезает область существования детерминированного хаоса (рис. 15а). При внимательном изучении рис. 15б можно заметить, что при подходе к левой границе окна периодичности, на небольшом интервале изменения параметра $\alpha_4 \in (0.129, 0.136)$ в системе происходит каскад бифуркаций удвоения периода. На рис. 18а–б приведены проекции фазовых портретов предельных циклов, образованных в результате бифуркаций удвоения периода. После первой бифуркации удвоения, сделав оборот вокруг цикла, траектория системы не попадает в исходную точку. И только сделав еще один оборот, траектория замыкается. После второй бифуркации траектория замыкается, соответственно, после четырех оборотов вокруг первоначального цикла и т.д. Если рассматривать эволюцию сечений Пуанкаре, то после каждой такой бифуркации количество точек, в которых траектории системы пересекают секущую плоскость, будет удваиваться. Для каждого предельного цикла из указанного интервала сечение Пуанкаре будет представлять дискретное множество, состоящее из конечного числа точек.

Такой каскад бифуркаций удвоения периода заканчивается при $\alpha_4 = 0.129$ возникновением в системе хаотического аттрактора, в спектре ЛХП которого появляется старший положительный показатель. На рис. 18в приведена проекция фазового портрета хаотического аттрактора. Переход от регулярного к хаотическому режиму осуществляется по сценарию Фейгенбаума [13, 14]. После критической точки накопления бифуркаций удвоения наблюдается обратный процесс последовательного "огрубления" тонкой структуры аттрактора. Возникающий хаотический аттрактор представляет собой некоторую

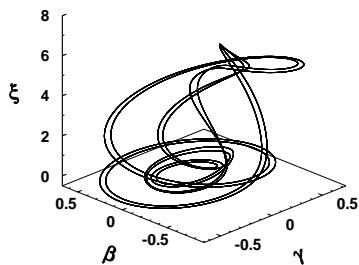
ленту траекторий, имеющую фрактальную структуру [9].

На рис.19 приведены распределения спектральной плотности предельных циклов системы (4) при $\alpha_4 = 0.136$, $\alpha_4 = 0.134$ и образовавшегося хаотического аттрактора при $\alpha_4 = 0.128$. Сначала в спектре присутствуют только гармоники, соответствующие основному периоду. После первой бифуркации удвоения периода появляется субгармоническая составляющая. Затем после каждой бифуркации удвоения в Фурье-спектре будут возникать новые субгармоники, точно в середине интервала между существовавшими ранее спектральными компонентами. В закритической области, после возникновения хаотического аттрактора, соответственно разрушаются субгармонические составляющие Фурье-спектра в обратном порядке их появления. На их месте возникают участки сплошного спектра.

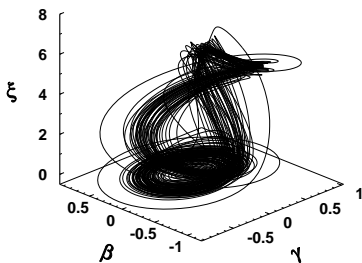
Как видно из рис. 15, данная область хаоса вновь сменяется областью периодичности при $\alpha_4 \approx 0.1$. В этой области существует окно периодичности в окрестности значения $\alpha_4 = 0.117$. Это окно настолько мало, что в выбранном масштабе построения карты динамических режимов оно не зафиксировано на карте. Однако его можно обнаружить по провалу графика зависимости старшего ляпуновского показателя (рис. 15б) в область отрицательных значений. Опишем переход к хаосу со стороны возрастания значений параметра α_4 . У порога интервала хаотичности в системе существует многотактный предельный цикл. На рис. 20а приведена проекция фазового портрета цикла такого типа построенная при $\alpha_4 = 0.1003$. При $\alpha_4 = 0.1004$ такой цикл исчезает и в системе возникает хаотический аттрактор. Проекция распределения инвариантной меры Крылова–Боголюбова хаотического аттрактора такого типа приведена на рис. 20б. Распределение инвариантной меры построено при помощи так называемой техники кодирования оттенками серого цвета, описанной в [2, 9]. Чем темнее область на рис. 20б, тем более длительное время находятся траектории аттрактора в этой области. Как видно из рис. 20б, более темные области распределения в фазовом пространстве практически вырисовывают малую окрестность исчезнувшего предельного цикла. Переход к хаосу здесь происходит через ранее описанную перемежаемость первого типа по Помо–Манневиллю. Движение траекторий в темных областях на рис. 20б (ламинарные стадии перемежаемости) сменяются непредсказуемыми заранее уходами траекторий в более светлые области. Это турбулентные всплески перемежаемости (турбулентные стадии). Длительность пребывания траекторий в турбу-



а

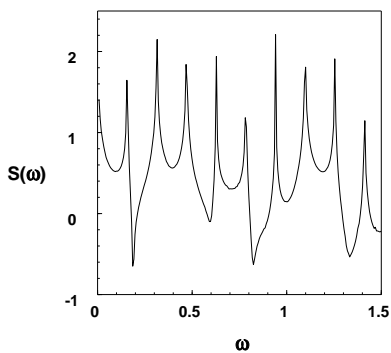


б

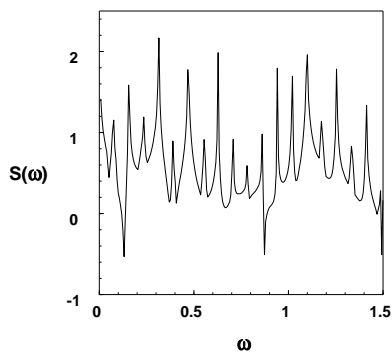


в

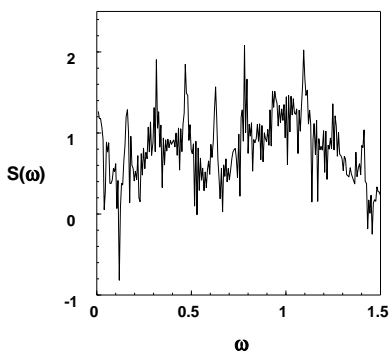
Рис. 18: Проекция фазового портрета предельного цикла при $\alpha_4 = 0.136$ (а); при $\alpha_4 = 0.134$ (б); и хаотического аттрактора при $\alpha_4 = 0.128$ (в).



а



б



в

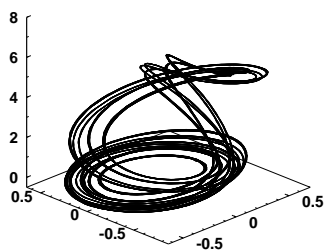
Рис. 19: Распределение спектральной плотности предельного цикла при $\alpha_4 = 0.136$ (а); при $\alpha_4 = 0.134$ (б); и хаотического аттрактора при $\alpha_4 = 0.128$ (в).

лентной фазе существенно меньше длительности их пребывания в ламинарной фазе.

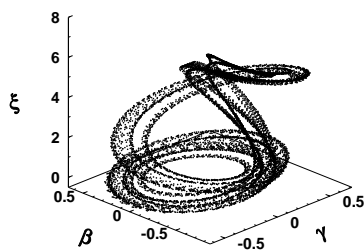
При отдалении значения α_4 от порога хаоса ($\alpha_4 = 0.1004$) происходят изменения структуры хаотического аттрактора, заключающиеся в том, что траектории начинают более плотно заполнять область его локализации в фазовом пространстве. Кроме того, несколько увеличиваются сами размеры такой области локализации. Данные изменения структуры хаотического аттрактора представлены на рис. 20в.

Остановимся более подробно на изменениях динамических режимов системы, происходящих при изменении α_4 в интервале (0.038, 0.079). Так, при $\alpha_4 = 0.078$ аттрактором системы является предельный цикл, проекция фазового портрета которого приведена на рис. 21а. Далее, при $\alpha_4 = 0.075$ существующий предельный цикл теряет свою устойчивость и в его окрестности, вследствие бифуркации Неймарка, возникает квазипериодический аттрактор — тороидальная поверхность [9]. Сигнатура спектра ЛХП такого аттрактора имеет вид $\langle 0, 0, -, - \rangle$. Ляпуновская размерность возникающего аттрактора равна двум. На рис. 21б–в приведены, соответственно, проекция фазового портрета и сечение Пуанкаре квазипериодического аттрактора, построенного при $\alpha_4 = 0.075$. Траектории аттрактора всюду плотно покрывают тороидальную поверхность. При этом они с некоторым почти периодом регулярно возвращаются в окрестность любой фиксированной точки данной тороидальной поверхности. Сечение Пуанкаре представляет собой регулярное множество, имеющее ленточную структуру [12]. Отметим, что в раннее проведенных исследованиях системы "генератор–излучатель" обнаружить в ней квазипериодические аттракторы не удавалось [2].

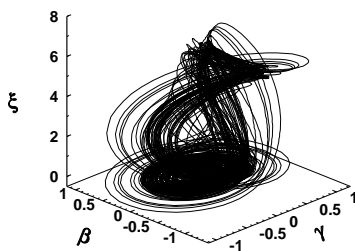
Особо обратим внимание на то, что приведенные на рис. 21 аттракторы локализуются в значительно меньшем фазовом объеме, чем аттракторы, рассмотренные ранее. На фазопараметрической характеристике системы (рис. 15б) четко прослеживается тенденция к сужению кроны бифуркационного дерева при уменьшении параметра α_4 , начиная от значения $\alpha_4 \approx 0.08$. При дальнейшем уменьшении α_4 квазипериодический аттрактор разрушается и в системе (4) жестко рождается устойчивый предельный цикл, проекция фазового портрета которого приведена на рис. 22а. Далее на малом интервале (0.066, 0.068) в системе происходит каскад бифуркаций удвоения периода, который приводит к рождению хаотического аттрактора. На рис. 22б–в приведены проекции фазовых портретов первой бифурка-



а

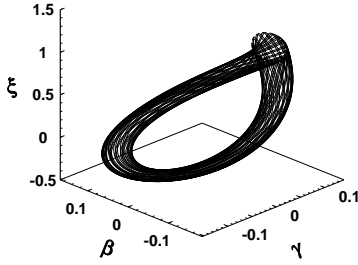


б



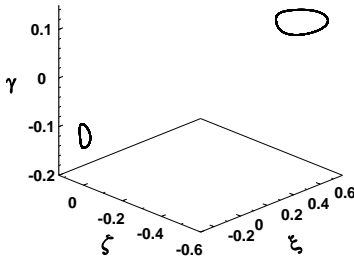
в

Рис. 20: Проекция фазового портрета предельного цикла при $\alpha_4 = 0.1003$ (а); проекция распределения инвариантной меры хаотического аттрактора при $\alpha_4 = 0.10051$ (б); проекция фазового портрета хаотического аттрактора при $\alpha_4 = 0.11$ (в).



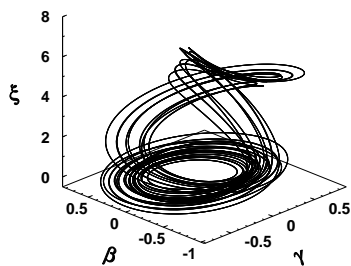
а

б

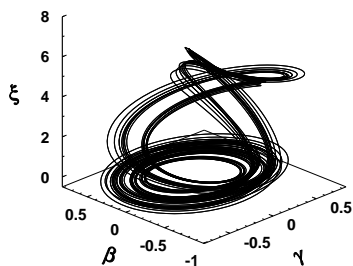


в

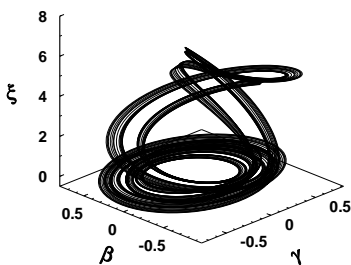
Рис. 21: Проекция фазового портрета предельного цикла при $\alpha_4 = 0.078$ (а); предельного тора при $\alpha_4 = 0.075$ (б) и его сечение Пуанкаре плоскостью $\beta = 0$ (в).



а



б



в

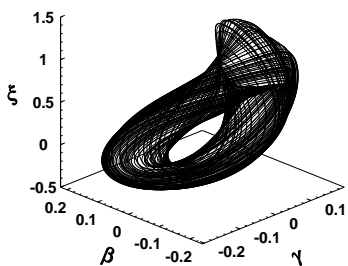
Рис. 22: Проекция фазового портрета предельного цикла при $\alpha_4 = 0.068$ (а); при $\alpha_4 = 0.067$ (б) и хаотического аттрактора при $\alpha_4 = 0.066$ (в).

ции удвоения периода цикла и возникающего хаотического аттрактора. Переход к хаосу осуществляется по описанному выше сценарию Фейгенбаума. Интересным является то, что все предельные циклы каскада бифуркаций удвоения периода и возникающий хаотический аттрактор вновь локализуются в заметно большем фазовом объеме, чем циклы и торы типа приведенных на рис. 21. На фазопараметрической характеристике (рис. 15б) данному каскаду соответствует заметное расширение кроны бифуркационного дерева.

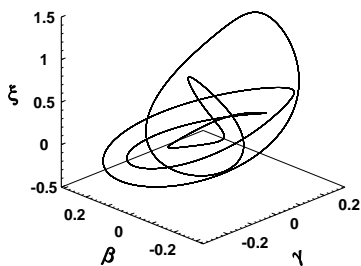
При $\alpha_4 = 0.0639$ происходит разрушение хаотического аттрактора, в системе (4) возникает предельный тор несколько иного типа, чем приведенный на рис. 21а. Проекция фазового портрета такого тора представлена на рис. 23а. Далее, при $\alpha_4 = 0.063$ в системе возникает резонансный предельный цикл на торе (рис. 23б). Траектория, сделав конечное число оборотов на поверхности тора, замыкается и представляет собой более сложное, но периодическое движение. При дальнейшем уменьшении α_4 , а именно при $\alpha_4 = 0.06$, в системе возникает хаотический аттрактор. Проекция фазового портрета и сечение Пуанкаре плоскостью $\beta = 0$ аттрактора такого типа приведены на рис. 23в–г.

Возникающий хаотический аттрактор по структуре своего фазового портрета заметно отличается от всех ранее исследованных хаотических аттракторов системы (4). Кроме того, хаотический аттрактор такого типа, как и предельные торы и циклы, представленные на рис. 21а–б, 23а–б, локализуется в заметно меньшем объеме фазового пространства. Однако ляпуновская размерность данного хаотического аттрактора, как и всех ранее рассмотренных хаотических аттракторов, имеет дробную величину и находится на интервале (2,3). Имеет место бесконечная возвращаемость траектории в окрестность любой точки хаотического аттрактора. При этом, в отличие от регулярных аттракторов, моменты времени возврата траектории являются некоторой хаотической последовательностью. Сечение Пуанкаре (рис. 23г) представляет собой развитое хаотическое точечное множество, которое полностью теряет ленточную структуру. В целом, в этом случае реализуется сценарий перехода к хаосу через квазипериодические режимы [9].

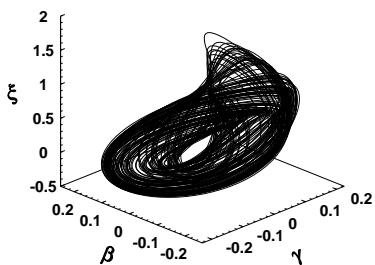
На рис.24 приведены Фурье-спектры периодического, квазипериодического и хаотического аттракторов системы, представленных на рис. 23а–в. Для предельного цикла Фурье-спектр имеет дискретную структуру с равноотдаленными гармоническими составляющими



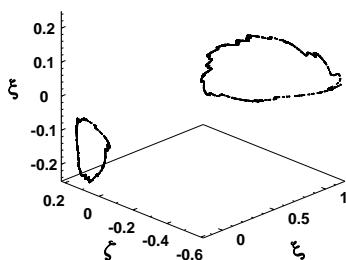
а



б



в



г

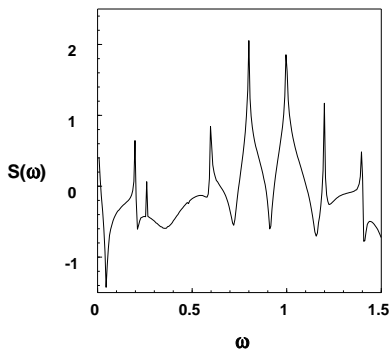
Рис. 23: Проекция фазового портрета предельного тора при $\alpha_4 = 0.0639$ (а), резонансного цикла при $\alpha_4 = 0.063$ (б) и хаотического аттрактора (в) при $\alpha_4 = 0.06$; сечение Пуанкаре хаотического аттрактора при $\alpha_4 = 0.06$ (г).

ми. После возникновения в системе вследствие бифуркации Неймарка предельного тора Фурье-спектр сохраняет свою дискретность, однако исчезает его гармоничность. Фурье-спектр хаотического аттрактора приобретает характерную непрерывную структуру. В данном случае спектр сплошной, с четко выраженными выбросами — "воспоминаниями" об исчезнувшем резонансном периодическом режиме.

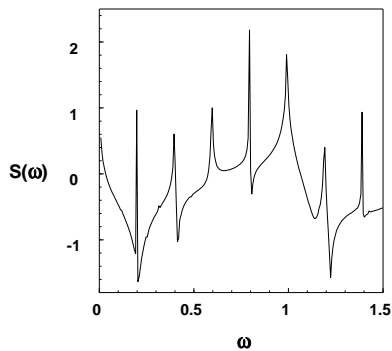
Как видно из рис. 15а, хаотический аттрактор существует на достаточно малом интервале $(0.059, 0.061)$ изменения параметра α_4 . При $\alpha_4 \leq 0.059$ происходит очередное разрушение хаотического аттрактора и в системе (4) вновь возникает предельный цикл. При дальнейшем уменьшении параметра α_4 , как следует из карты динамических режимов (рис. 15а), происходит чередование типов установившихся режимов вида "хаос–тор–цикл". Было установлено, что возникающие в этой области карты аттракторы качественно подобны приведенным на рис. 23.

Отметим, что при изучении динамики системы вдоль других разрезов данного листа карты динамических режимов (рис. 14а) наблюдаются аналогичные типы регулярных и хаотических аттракторов и, соответственно, подобные сценарии перехода к хаосу.

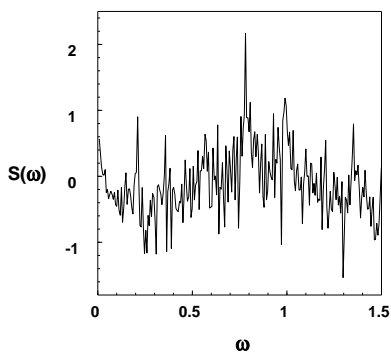
В заключение рассмотрим более детально типы хаотических аттракторов системы (4), существующие в области изменения ее параметров, соответствующей второму листу карты динамических режимов (рис. 14б). Проведем разрез этого листа карты по вертикальной оси $X = 6.70$. Тогда, как следует из карты динамических режимов, при уменьшении значения α_4 последовательная смена типов динамических режимов в системе имеет вид "цикл–гиперхаос–хаос–цикл". Правда, следует отметить, что в области хаоса возможно наличие очень "узких" окон периодичности, нанесение которых на карту возможно только при значительном увеличении ее масштаба. На рис. 25 приведен график зависимости старшего, отличного от нуля, ляпуновского показателя системы от параметра α_4 , построенный с шагом по α_4 , на два порядка превышающим шаг, который использовался при построении карты динамических режимов. Как следует из этого рисунка, в области хаоса (области положительности старшего ляпуновского характеристического показателя) существует два окна периодичности в окрестности точек $\alpha_4 \approx 0.0271$ и $\alpha_4 \approx 0.0369$. О существовании данных окон свидетельствуют провалы графика ляпуновского показателя в область отрицательных значений.



а

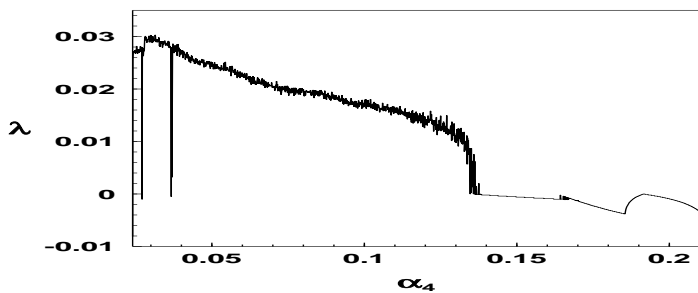


б

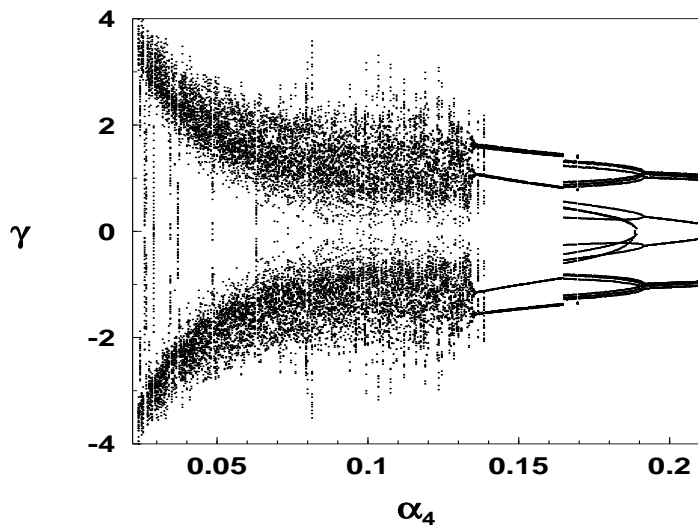


в

Рис. 24: Распределение спектральной плотности предельного тора при $\alpha_4 = 0.0639$ (а); предельного цикла при $\alpha_4 = 0.063$ и хаотического аттрактора при $\alpha_4 = 0.06$ (в).



а

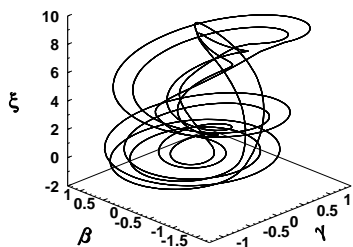


б

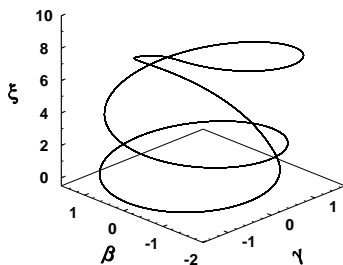
Рис. 25: График зависимости ляпуновского характеристического показателя от параметра α_4 (а); фазопараметрическая характеристика системы по координате γ (б).

На рис. 25б построена фазопараметрическая характеристика (бифуркационное дерево) системы относительно параметра α_4 и динамической переменной γ при $X = 6.70$. В правой части этого рисунка видны отдельные ветви бифуркационного дерева. Это область установившихся регулярных режимов. В этой области пространства параметров аттракторами системы (4) являются различные предельные циклы. На бифуркационном дереве четко просматриваются расщепления его ветвей, соответствующие бифуркациям удвоения периода (увеличения тактности) предельных циклов. Однако эти бифуркации не приводят к появлению хаотических аттракторов. Их каскад заканчивается возникновением цикла меньшей тактности и более простой структуры. На рис. 26а приведена проекция фазового портрета одного из возможных многотактных циклов системы, построенного при $\alpha_4 = 0.18$. Соответственно на рис. 26б приведена проекция фазового портрета предельного цикла более простой структуры. Заметим, что циклы такого типа существуют в системе при $0.135 < \alpha_4 < 0.167$. При достижении параметром α_4 значения 0.1351 происходит разрушение предельного цикла и в системе (4) возникает хаос. Хаотическую область в пространстве параметров можно легко идентифицировать по резкому изменению структуры бифуркационного дерева в левой части рис. 25б. Эта часть бифуркационного дерева представляет собой густо затемненную точечную область, в которой исчезает "ветвистая" структура, присущая регулярной области.

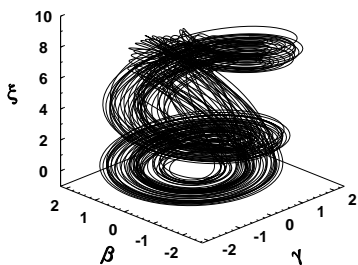
На рис. 26в–г приведены проекция фазового портрета и сечение Пуанкаре возникающего хаотического аттрактора, построенные при $\alpha_4 = 0.134$. Данный аттрактор является гиперхаотическим. Сигнатура спектра ЛХП гиперхаотического аттрактора имеют вид $\langle +, +, 0, - \rangle$. Особенностью образованного аттрактора является положительное значение не только первого, но и второго ляпуновского характеристического показателя. Следовательно, в фазовом пространстве существуют два направления, по которым разбегаются траектории аттрактора. Сечение Пуанкаре гиперхаотического аттрактора представляет собой развитое хаотическое множество. Не может быть и речи о какой-либо аппроксимации системы (4) одномерным дискретным отображением. На рис. 27а–б построены распределения спектральной плотности устойчивого предельного цикла при $\alpha_4 = 0.140$ и гиперхаотического аттрактора при $\alpha_4 = 0.134$. Фурье-спектр предельного цикла имеет дискретную структуру, а спектр хаотического аттрактора — сплошной. В сплошном Фурье-спектре



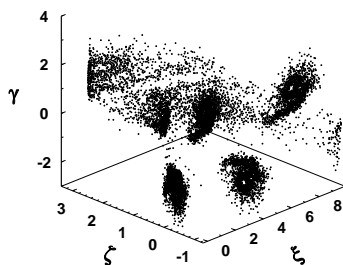
а



б



в



г

Рис. 26: Проекция фазовых портретов предельных циклов при $\alpha_4 = 0.18$ (а); $\alpha_4 = 0.140$ (б); проекция фазового портрета (в) и сечение Пуанкаре (г) гиперхаотического аттрактора при $\alpha_4 = 0.134$.

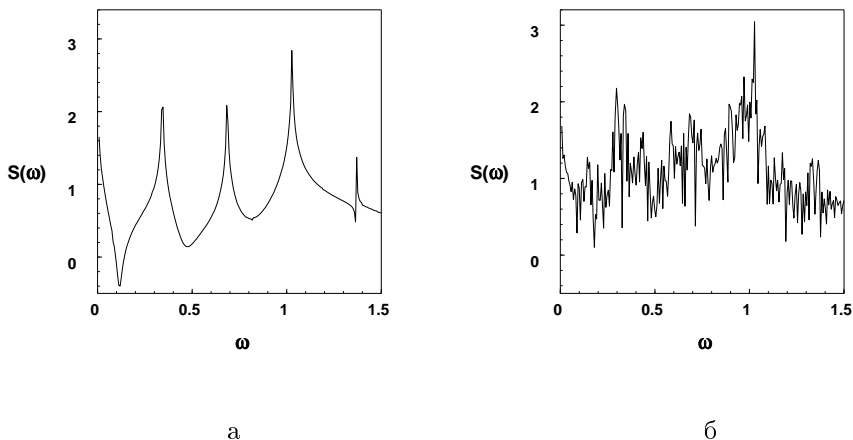


Рис. 27: Распределение спектральной плотности предельного цикла при $\alpha_4 = 0.140$ (а) и гиперхаотического аттрактора при $\alpha_4 = 0.134$ (б).

гиперхаотического аттрактора практически разрушаются спектральные пики предельного цикла, что является свидетельством о существовании в системе, при $\alpha_4 = 0.134$, развитого хаоса.

При уменьшении значения α_4 сначала происходит бифуркация "гиперхаос–хаос", в результате чего в системе вместо гиперхаотического возникает хаотический аттрактор, который при дальнейшем уменьшении α_4 сменяется предельным циклом. Заметим, что подобные смены динамических режимов описаны в [2].

Заключение. Таким образом, полученные в работе результаты, в совокупности с результатами работ [2]–[4], позволяют утверждать, что система "пьезокерамический излучатель–генератор" обладает исключительным разнообразием регулярной и хаотической динамики. В этой системе реализуются все основные типы регулярных аттракторов динамических систем: положения равновесия, предельные циклы и предельные торы. Исключительным разнообразием отличается и хаотическая динамика системы "пьезокерамический излучатель–генератор". В ней существуют несколько типов хаотических и гиперхаотических аттракторов и реализуются все основные сценарии

перехода от регулярных режимов к хаотическим (каскад Фейгенбаума, перемежаемость по Помо–Манневиллю, переход к хаосу через квазипериодические режимы, жесткие переходы к хаосу). По универсальности реализующихся в ней динамических процессов система "пьезокерамический излучатель–генератор" занимает особое место в нелинейной динамике. Она может рассматриваться как некая модель, в которой, в миниатюре, представлено все богатство нелинейной динамики в целом.

Литература

- [1] *Kononenko V. O.* Vibrating system with a limited power-supply. — London: Iliffe, 1969. — 236 p.
- [2] *Краснопольская Т. С., Швец А. Ю.* Регулярная и хаотическая динамика систем с ограниченным возбуждением. — Москва; Ижевск: R&CD, 2008. — 280 с.
- [3] *Krasnopolskaya T.S., Shvets A.Yu.* Chaos in vibrating systems with limited power-supply // *Chaos*. — 1993. — **3**, № 3. — P. 387–395.
- [4] *Краснопольская Т.С., Швец А.Ю.* Детерминированный хаос в системе генератор–пьезокерамический излучатель // *Нелинейная динамика*. — 2006. — **2**, № 1. — С. 55–74.
- [5] *Хайпер Е., Нерсетт С.П., Ваннер Г.* Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи. — Москва: Мир, 1990. — 512 с.
- [6] *Benettin G., Galgani L., Strelcyn J.M.* Kolmogorov entropy and numerical experiments // *Phys. Rev. A*. — 1976. — **14**, № 6. — P. 2338–2342.
- [7] *Benettin G., Galgani L., Giorgilli A., Strelcyn J.M.* Lyapunov Characteristic Exponents for Smooth Dynamical Systems and for Hamiltonian Systems; a Method for Computing All of them. I // *Meccanica*. — 1980. — **15**, №1. — P. 9–20.
- [8] *Benettin G., Galgani L., Giorgilli A., Strelcyn J.M.* Lyapunov Characteristic Exponents for Smooth Dynamical Systems and for Hamiltonian Systems; a Method for Computing All of them. II // *Meccanica*. — 1980. — **15**, №1. — P. 21–30.

- [9] *Кузнецов С.П.* Динамический хаос. — Москва: Физматлит, 2001. — 295 с.
- [10] *Henon M.* On the numerical computation of Poincare maps // *Physica. D.* — 1982. — **5**, № 2. — P. 412–415.
- [11] *Filon L.N.G.* On a quadrature formula for trigonometric integrals // *Proc. R. Soc. Edinburgh.* — 1929. — **49**. — P. 38–47.
- [12] *Анищенко В.С.* Сложные колебания в простых системах. — Москва: Наука, 1990. — 312 с.
- [13] *Feigenbaum M.J.* Quantative universality for a class of nonlinear transformations // *J.Stat. Phys.* — 1978. — **19**, № 1. — P. 25–52.
- [14] *Feigenbaum M.J.* The universal metric properties of nonlinear transformations // *J.Stat. Phys.* — 1979. — **21**, № 6. — P. 669–706.